2.8 Les formes de Hankel, ou comment faire le lien entre formes quadratiques et racines de polynômes (avec une étude du degré 3) (144, 159, 170, 171) [3]

Dans ce développement je démontre un résultat très rigolo dans le H2G2 de Caldero et Germoni les boss : si on a un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, alors on peut construire une forme quadratique réelle φ telle que sa signature (p, q) détermine le nombre de racines distinctes de P **et** le nombre de racines réelles distinctes de P : $p+q$ donnera le nombre de racines distinctes de P et $p-q$ donnera le nombre de racines réelles distinctes de P ! C'est beau les maths non ?

Proposition 2.22 (Les formes de Hankel)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n possédant t racines disctinctes $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{C}$ de multiplicités notées $m_1, \ldots, m_t$, dont s racines réelles. En notant :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad s_j = \sum_{k=1}^{t} m_k x_k^j$$

la j-ième somme de Newton associée à ces racines, alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & X & \longmapsto & \displaystyle\sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} X_i X_j \end{array}$$

définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$, dont la restriction $\varphi_{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}^n$ est une forme quadratique réelle de signature $\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right)$.

Démonstration. On a déjà que φ est bien une forme quadratique, sa forme polaire étant bien évidemment :

$$\overset{\vee}{\varphi}(X, Y) = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} X_i Y_j.$$

De plus, sa restriction $\varphi_{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}^n$ est bien une forme quadratique réelle car les sommes de Newton sont des nombre réels par le théorème fondamental des polynômes symétriques : s_j est un polynôme symétrique réel (car entier) en les x_k. Ainsi, il s'écrit comme un polynôme réel (et même entier) en les polynômes symétriques élémentaires en les x_k, qui sont en fait les coefficients de P au signe près. Les s_j sont donc des polynômes réels en les coefficients de P qui sont réels, ce sont donc des nombres réels. Notons alors (p, q) la signature de $\varphi_{\mathbb{R}}$. On va essayer de mettre la forme φ sous forme réduite de Gauss, c'est-à-dire l'écrire sous la forme :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p+q} \ell_k^2$$

où $(\ell_k)_{1 \leq k \leq p+q}$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{C}^n$ linéairement indépendantes. Regardons bien droit dans les yeux la forme φ :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{C}^n, \quad \varphi(X) &= \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} \sum_{k=1}^{t} m_k x_k^{i+j} X_i X_j \\ &= \sum_{k=1}^{t} m_k \left(\sum_{0 \leq i,j \leq n-1} x_k^{i+j} X_i X_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{t} m_k \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_k^i X_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_k^j X_j \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{t} m_k \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_k^i X_i \right)^2 \end{aligned}$$

On a donc trouvé des candidats pour nos formes linéaires ! Posons alors pour $k \in [\![1, t]\!]$:

$$\begin{array}{rccl} \ell_k & : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & X & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x_k^i X_i. \end{array}$$

ATTENTION ! ! Leurs restrictions à $\mathbb{R}^n$ ne sont **plus** des formes linéaires réelles ! ! Vous allez voir comment on règle ce problème. Montrons déjà que ce sont des formes linéaires indépendantes. Pour cela il faut et il suffit que le rang de la famille $(\ell_1, \ldots, \ell_t)$ soit maximal. Pour cela, regardons bien droit dans les yeux la matrice de cette famille de vecteurs dans la base duale canonique $\mathscr{B}^* = (e_0^*, \ldots, e_{n-1}^*)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(\ell_1, \ldots, \ell_t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_t \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_t^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_t^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Puisque $t \leq n$, on reconnaît un fameux mineur extrait de taille t :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{t-1} & x_t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{t-2} & x_2^{t-2} & \cdots & x_{t-1}^{t-2} & x_t^{t-2} \\ x_1^{t-1} & x_2^{t-1} & \cdots & x_{t-1}^{t-1} & x_t^{t-1} \end{vmatrix}$$

c'est le déterminant de Vandermonde associé aux racines $x_1, \ldots, x_t$ qui sont toutes distinctes par hypothèse ! Ce déterminant qui, rappelons-le, vaut :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq t} (x_j - x_i)$$

est donc non-nul, ainsi les formes linéaires ℓ_k sont donc linéairement indépendantes.

Rappel de comment calculer le déterminant de Vandermonde : En notant $V(x_1, \ldots, x_t)$ la matrice de Vandermonde dont on veut calculer le déterminant, on remarque qu'en multipliant à gauche par le vecteur ligne :

$$L = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{t-1} \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$LV(x_1, \ldots, x_t) = \begin{pmatrix} P(x_1) & \cdots & P(x_t) \end{pmatrix}$$

où on a noté :

$$P = \sum_{i=0}^{t-1} a_i X^i.$$

Ainsi, en multipliant $V(x_1, \ldots, x_t)$ à gauche par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} I_{t-1} & \mathbf{O} \\ L & 1 \end{pmatrix}$$

où $L = (a_0, \ldots, a_{t-2})$ tel que :

$$\prod_{i=1}^{t-1} (X - x_i) = X^{t-1} + \sum_{i=0}^{t-2} a_i X^i,$$

on a :

$$AV(x_1,\dots,x_t)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{t-1} & x_t\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x_1^{t-2} & x_2^{t-2} & \cdots & x_{t-1}^{t-2} & x_t^{t-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \displaystyle\prod_{i=1}^{t-1}(x_t-x_i)\end{pmatrix}.$$

Ainsi, étant donné que $\det(A)=1$, en développant selon la dernière ligne :

$$\det(V(x_1,\dots,x_t))=\left(\prod_{i=1}^{t-1}(x_t-x_i)\right)\det(V(x_1,\dots,x_{t-1})).$$

On déduit alors la formule par récurrence sur t.
On a donc déjà une première partie du résultat ! Si (p,q) est la signature de $\varphi_{\mathbb{R}}$, alors :

$$p+q=t$$

car le nombre de formes linéaires indépendantes intervenant dans la forme réduite de Gauss est égal au rang de la forme quadratique qui est bien $p+q$. Reste alors à prouver que $p-q=s$. Comment faire ? Regardons bien dans les yeux (encore !) la forme $\varphi_{\mathbb{R}}$. Quitte à réordonner les racines, on suppose que $x_1,\dots,x_s$ sont les racines réelles de P et que les racines $x_{s+1},x_{s+2},\dots,x_{\frac{t+s}{2}}$ sont conjuguées respectivement aux racines $x_{\frac{t+s}{2}+1},x_{\frac{t+s}{2}+2},\dots,x_t$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall X\in\mathbb{R}^n,\quad \varphi_{\mathbb{R}}(X) &= \varphi(X)\\ &= \sum_{k=1}^{t} m_k\ell_k(X)^2\\ &= \sum_{k=1}^{s} m_k\ell_k(X)^2+\sum_{k=s+1}^{t} m_k\ell_k(X)^2\\ &= \sum_{k=1}^{s} m_k\ell_k(X)^2+\sum_{k=s+1}^{\frac{t+s}{2}} m_k\left(\ell_k(X)^2+\ell_{k+\frac{t+s}{2}}(X)^2\right)\\ &= \sum_{k=1}^{s} m_k\ell_k(X)^2+\sum_{k=s+1}^{\frac{t+s}{2}} 2m_k\left(\mathrm{Re}(\ell_k(X))^2-\mathrm{Im}(\ell_k(X))^2\right).\end{aligned}$$

Or étant donné que la famille $(\ell_k)_{1\leq k\leq t}$ est $\mathbb{R}$-libre et que l'application :

$$\begin{array}{ccc}\left((\mathbb{C}^n)^*\right)^t & \longrightarrow & \left((\mathbb{C}^n)^*\right)^t\\ (\psi_1,\dots,\psi_t) & \longmapsto & \left(\psi_1,\dots,\psi_s,\dfrac{\psi_{s+1}+\psi_{\frac{s+t}{2}+1}}{2},\dots,\dfrac{\psi_{\frac{t+s}{2}}+\psi_t}{2},\dfrac{\psi_{s+1}-\psi_{\frac{s+t}{2}+1}}{2i},\dots,\dfrac{\psi_{\frac{t+s}{2}}-\psi_t}{2i}\right)\end{array}$$

est un isomorphisme, la famille $\left(\ell_1,\dots,\ell_s,\mathrm{Re}\left(\ell_{s+1}),\mathrm{Im}(\ell_{s+1}),\dots,\mathrm{Re}\left(\ell_{\frac{s+t}{2}}\right),\mathrm{Im}\left(\ell_{\frac{s+t}{2}}\right)\right)$ est également une famille libre. Ainsi, on a que la signature de $\varphi_{\mathbb{R}}$ est :

$$\left(\frac{t+s}{2},\frac{t-s}{2}\right)=(p,q)$$

et donc $p-q=s$. Cela conclut donc la preuve ! $\square$

Une petite étude sur les polynômes de degré 3 ne peut pas faire de mal, pas vrai ? Alors faisons-le ! Soit $P=X^3+pX+q$ un polynôme de degré 3, de racines notées x_1,x_2,x_3. Il s'agit d'une forme générale de polynôme de degré 3 vers laquelle on se ramène en effectuant une translation. Calculons donc les sommes de Newton associées à ce polynôme jusqu'à l'ordre $4 = 2(\deg(P) - 1)$. Comment faire ? Il suffit de les exprimer comme polynômes en les polynômes symétriques élémentaires, qui donnent les coefficients de P via les relations coefficients-racines. On a alors :

$$\begin{array}{ccc} s_0 = 3, & s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 & s_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2p \\ & s_3 = Aq & s_4 = Bp^2 \end{array}$$

où A et B sont des coefficients réels **qui ne dépendent pas des racines de P du moment que leur somme vaut 0 !** Ainsi, en considérant :

$$P_1 = (X-1)(X-2)(X+3) = X^3 - 7X + 6$$

on a :

$$s_3 = 1 + 8 - 27 = -18 = -3 \times 6$$

ce qui donne donc $A = -3$. Également :

$$s_4 = 1 + 16 + 81 = 98 = 2 \times (-7)^2$$

ce qui donne $B = 2$. Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} s_0 = 3, & s_1 = 0 & s_2 = -2p \\ s_3 = -3q & s_4 = 2p^2 & \end{array}$$

Notre forme quadratique est donc, dans ce cas :

$$\varphi(X_0, X_1, X_2) = 3X_0^2 - 4pX_0X_2 - 2pX_1^2 - 6qX_1X_2 + 2p^2X_2^2.$$

Si $p = 0$, on a :

$$\varphi(X_0, X_1, X_2) = 3X_0^2 - 6qX_1X_2 = 3X_0^2 - \frac{3q}{2}\left((X_1 + X_2)^2 - (X_1 - X_2)\right)^2$$

qui est de signature $(2, 1)$ si $q \neq 0$ et $(1, 0)$ si $q = 0$. C'est cohérent ! Si $q = 0$, alors $P = X^3$ qui a une seule racine (0) qui est triple, et si $q \neq 0$, alors $P = X^3 + q$ qui a une seule racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Calculons alors sa forme réduite de Gauss dans le cas où $p \neq 0$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(X_0, X_1, X_2) & = & 3X_0^2 - 4pX_0X_2 - 2pX_1^2 - 6qX_1X_2 + 2p^2X_2^2 \\ & = & 3\left(X_0^2 - \frac{4p}{3}X_0X_2\right) - 2pX_1^2 - 6qX_1X_2 + 2p^2X_2^2 \\ & = & 3\left(X_0 - \frac{2p}{3}X_2\right)^2 - \frac{4p^2}{3}X_2^2 - 2pX_1^2 - 6qX_1X_2 + 2p^2X_2^2 \\ & = & 3\left(X_0 - \frac{2p}{3}X_2\right)^2 - 2p\left(X_1^2 - \frac{3q}{p}X_1X_2\right) + \frac{2p^2}{3}X_2^2 \\ & = & 3\left(X_0 - \frac{2p}{3}X_2\right)^2 - 2p\left(X_1 - \frac{3q}{2p}X_2\right)^2 + \frac{9q^2}{2p}X_2^2 + \frac{2p}{3}X_2^2 \\ & = & 3\left(X_0 - \frac{2p}{3}X_2\right)^2 - 2p\left(X_1 - \frac{3q}{2p}X_2\right)^2 + \frac{27q^2 + 4p^3}{6p}X_2^2 \\ & = & 3\left(X_0 - \frac{2p}{3}X_2\right)^2 - 2p\left(X_1 - \frac{3q}{2p}X_2\right)^2 - \frac{\Delta(P)}{6p}X_2^2 \end{array}$$

où $\Delta(P) = -4p^3 - 27q^2$ désigne le discriminant de P. Ainsi, si $\Delta(P) < 0$, alors φ a pour signature $(2, 1)$ car $2p$ et $\frac{\Delta(P)}{6p}$ sont alors de signes opposés. Ainsi, si $\Delta(P) < 0$, P possède une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Si $\Delta(P) > 0$, montrons que p doit être négatif. En effet, dans le cas contraire, la forme quadratique φ serait de signature $(1, 2)$ et aurait donc -1 racines réelles ! **ABSURDE !** Donc $p > 0$ et φ est donc de signature

$(3, 0)$ et donc P possède 3 racines réelles distinctes. Enfin, si $\Delta(P) = 0$, alors φ est de signature $(1, 1)$ si $p > 0$ et possède donc 0 racines réelles : **IMPOSSIBLE !** Donc $p < 0$ et φ est de signature $(2, 0)$, ce qui est cohérent avec le fait que P est à racines réelles et possède une racine double !

Remarque 2.8.1 (Pourquoi ce nom ? Et puis ça sert à quelque chose ce résultat ?)**.** *Le nom « forme de Hankel » vient du fait que la matrice de la forme quadratique φ est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

et une telle matrice est appelée « matrice de Hankel ». Je ne sais pas vraiment si ce résultat sert à quelque chose, mais je conjecture le fait que si P est un polynôme de degré n, alors sous certaines conditions, le discriminant de P apparaît naturellement en facteur de la forme linéaire $(e_n^*)^2$ et donc c'est une autre preuve du fait que si $\Delta(P) = 0$, alors P a une racine multiple et réciproquement.